SET – 3

Series : ONS/1

कोड नं.
Code No. 65/1/3/D

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

*निर्धारित समय : **3** घण्टे* — *अधिकतम अंक : **100***
*Time allowed : **3** hours* — *Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।*

(iii) *खण्ड **अ** के प्रश्न **1 – 6** तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **1** अंक निर्धारित है ।*

(iv) *खण्ड **ब** के प्रश्न **7 – 19** तक दीर्घ-उत्तर **I** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **4** अंक निर्धारित हैं ।*

(v) *खण्ड **स** के प्रश्न **20 – 26** तक दीर्घ-उत्तर **II** प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **6** अंक निर्धारित हैं ।*

(vi) *उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1-6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7-19*** *in Section B are long-answer* ***I*** *type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20-26*** *in Section C are long-answer* ***II*** *type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड – अ
SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **6** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **6** carry **1** mark each.

1. दो सदिश $\hat{j} + \hat{k}$ तथा $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB तथा AC को क्रमश: निरूपित करते हैं, तो A से होकर जाने वाली माध्यिका की लंबाई ज्ञात कीजिए ।

   The two vectors $\hat{j} + \hat{k}$ and $3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ represent the two sides AB and AC, respectively of a ΔABC. Find the length of the median through A.

2. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए, जो कि मूल बिंदु से 5 मात्रक दूरी पर है और सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ इस पर अभिलंब है ।

   Find the vector equation of a plane which is at a distance of 5 units from the origin and its normal vector is $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$.

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix}$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए ।

   Find the maximum value of $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix}$

4. यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि $A^2 = I$ है, तो $(A - I)^3 + (A + I)^3 - 7A$ का सरलतम मान ज्ञात कीजिए ।

   If A is a square matrix such that $A^2 = I$, then find the simplified value of $(A - I)^3 + (A + I)^3 - 7A$.

5. दिया है कि यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2b & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -1 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए ।

Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2b & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3a & 3 & -1 \end{bmatrix}$ is given to be symmetric, find values of a and b.

6. उस बिंदु का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a} - 2\vec{b}$ और $2\vec{a} + \vec{b}$ हैं, को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 1 के बाह्य अनुपात में विभाजित करता है ।

Find the position vector of a point which divides the join of points with position vectors $\vec{a} - 2\vec{b}$ and $2\vec{a} + \vec{b}$ externally in the ratio 2 : 1.

खण्ड – ब

SECTION – B

प्रश्न संख्या **7** से **19** तक प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है ।

Question numbers **7** to **19** carry **4** marks each.

7. निम्न अवकल समीकरण का सामान्य हल ज्ञात कीजिए :

$$(1 + y^2) + \left(x - e^{\tan^{-1} y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

Find the general solution of the following differential equation :

$$(1 + y^2) + \left(x - e^{\tan^{-1} y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

8. यदि $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ और $\vec{c} + \vec{a}$ समतलीय हैं, तो दर्शाइए कि सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ समतलीय हैं ।

Show that the vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are coplanar if $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ and $\vec{c} + \vec{a}$ are coplanar.

9. बिंदु (1, 2, – 4) से जाने वाली और रेखाओं $\vec{r} = (8\hat{i} - 19\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda\,(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$ तथा $\vec{r} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ पर लंब रेखा के सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the vector and Cartesian equations of the line through the point (1, 2, – 4) and perpendicular to the two lines.

$$\vec{r} = (8\hat{i} - 19\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda\,(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k}) \text{ and } \vec{r} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k}).$$

10. एक निजी कंपनी में प्रबंधक (मैनेजर) के पद के लिए तीन व्यक्ति (A, B और C) आवेदन देते हैं । उनके (A, B और C के) चुने जाने के संयोग 1 : 2 : 4 के अनुपात में हैं । कंपनी के लाभ में सुधार लाने के लिए A, B और C द्वारा किए जाने वाले बदलावों की शुरूआत होने की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.8, 0.5 और 0.3 हैं । यदि बदलाव नहीं आता है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह C की नियुक्ति के कारण हुआ है ।

अथवा

A और B पासों के एक युग्म को बारी-बारी फेंकते हैं । A जीत जाएगा यदि उसे 7 का योग प्राप्त होगा और B जीत जाएगा यदि उसे 10 का योग प्राप्त होगा । यदि A खेल को प्रारंभ करता है, तो B के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

Three persons A, B and C apply for a job of Manager in a Private Company. Chances of their selection (A, B and C) are in the ratio 1 : 2 : 4. The probabilities that A, B and C can introduce changes to improve profits of the company are 0.8, 0.5 and 0.3 respectively. If the change does not take place, find the probability that it is due to the appointment of C.

OR

A and B throw a pair of dice alternately. A wins the game if he gets a total of 7 and B wins the game if he gets a total of 10. If A starts the game, then find the probability that B wins.

11. सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

अथवा

x के लिए हल कीजिए :

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$$

Prove that :

$$\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

OR

Solve for x :

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$$

12. आर्यन और बब्बन की मासिक आय 3 : 4 के अनुपात में है और उनका मासिक खर्च 5 : 7 के अनुपात में है । यदि प्रत्येक ₹ 15,000 मासिक की बचत करता है, तो आव्यूह विधि से उनकी मासिक आय ज्ञात कीजिए । इस समस्या में कौन सा मूल्य दर्शाया गया है ?

The monthly incomes of Aryan and Babban are in the ratio 3 : 4 and their monthly expenditures are in the ratio 5 : 7. If each saves ₹ 15,000 per month, find their monthly incomes using matrix method. This problem reflects which value ?

13. यदि $x = a \sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ और $y = b \cos 2t\,(1 - \cos 2t)$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ के मान $t = \frac{\pi}{4}$ तथा $t = \frac{\pi}{3}$ पर ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $y = x^x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0.$

If $x = a \sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ and $y = b \cos 2t\,(1 - \cos 2t)$, find the values of $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{\pi}{4}$ and $t = \frac{\pi}{3}$.

OR

If $y = x^x$, prove that $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0.$

14. p तथा q के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sin^3 x}{3 \cos^2 x} & , \text{ यदि } x < \dfrac{\pi}{2} \\ p & , \text{ यदि } x = \pi/2 \\ \dfrac{q(1 - \sin x)}{(\pi - 2x)^2} & , \text{ यदि } x > \pi/2 \end{cases}$$

$x = \pi/2$ पर संतत है ।

Find the values of p and q, for which

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sin^3 x}{3 \cos^2 x} & , \text{ if } x < \dfrac{\pi}{2} \\ p & , \text{ if } x = \pi/2 \\ \dfrac{q(1 - \sin x)}{(\pi - 2x)^2} & , \text{ if } x > \pi/2 \end{cases}$$

is continuous at $x = \pi/2$.

15. दर्शाइए कि वक्र $x = 3 \cos t - \cos^3 t$ तथा $y = 3 \sin t - \sin^3 t$ के किसी बिंदु t पर अभिलंब का समीकरण

$$4(y \cos^3 t - x \sin^3 t) = 3 \sin 4t.$$

Show that the equation of normal at any point t on the curve $x = 3 \cos t - \cos^3 t$ and $y = 3 \sin t - \sin^3 t$ is

$$4(y \cos^3 t - x \sin^3 t) = 3 \sin 4t.$$

16. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{(3 \sin \theta - 2) \cos \theta}{5 - \cos^2\theta - 4 \sin \theta} d\theta$

अथवा

ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx.$

Find $\int \frac{(3 \sin \theta - 2) \cos \theta}{5 - \cos^2\theta - 4 \sin \theta} d\theta.$

OR

Evaluate $\int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx$

17. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} dx$

Find $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} dx.$

18. मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-1}^{2} |x^3 - x| dx$

Evaluate $\int_{-1}^{2} |x^3 - x| dx.$

19. अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए ।

$(1 - y^2) (1 + \log x) dx + 2xy dy = 0$, दिया है कि जब $x = 1$ है, तो $y = 0$ है ।

Find the particular solution of the differential equation

$(1 - y^2) (1 + \log x) dx + 2xy dy = 0$, given that $y = 0$ when $x = 1$.

खण्ड – स

SECTION – C

प्रश्न संख्या **20** से **26** तक प्रत्येक प्रश्न **6** अंक का है ।

Question numbers **20** to **26** carry **6** marks each.

20. उस बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ पर A (3, – 4, –5) और B (2, –3, 1) से होकर जाने वाली रेखा उस समतल को काटती है जो कि तीन बिंदुओं L(2, 2, 1), M(3, 0, 1) और N(4, –1, 0) से गुजरता है । वह अनुपात भी ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदु P रेखाखंड AB को विभाजित करता है ।

Find the coordinate of the point P where the line through A(3, – 4, –5) and B (2, –3, 1) crosses the plane passing through three points L(2, 2, 1), M(3, 0, 1) and N(4, –1, 0). Also, find the ratio in which P divides the line segment AB.

21. एक कलश में 3 सफेद और 6 लाल गेंदें हैं । इसमें से उत्तरोत्तर चार गेंदें प्रतिस्थापना के बाद निकाली गई । लाल गेंदों के निकाले जाने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । इसका माध्य और प्रसरण भी ज्ञात कीजिए ।

An urn contains 3 white and 6 red balls. Four balls are drawn one by one with replacement from the urn. Find the probability distribution of the number of red balls drawn. Also find mean and variance of the distribution.

22. एक निर्माता दो प्रकार के उत्पाद A और B बनाता हैं । दोनों उत्पाद बनने के लिए दो विभिन्न मशीनों में संसाधित होते हैं । प्रथम मशीन की उपलब्ध क्षमता 12 घंटे और दूसरी मशीन की उपलब्ध क्षमता 9 घंटे प्रतिदिन है । उत्पाद A की 1 इकाई बनाने के लिए दोनों मशीनों पर 3-3 घंटे चाहिए और उत्पाद B की एक इकाई बनाने के लिए प्रथम मशीन पर 2 घंटे और दूसरी मशीन पर 1 घंटा चाहिए । उत्पाद A की एक इकाई ₹ 7 लाभ पर बेची जाती है और उत्पाद B की ₹ 4 लाभ पर । आलेखीय विधि से ज्ञात कीजिए कि अधिकतम लाभ के लिए दैनिक उत्पादन का स्तर कितना होना चाहिए ।

A manufacturer produces two products A and B. Both the products are processed on two different machines. The available capacity of first machine is 12 hours and that of second machine is 9 hours per day. Each unit of product A requires 3 hours on both machines and each unit of product B requires 2 hours on first machine and 1 hour on second machine. Each unit of product A is sold at ₹ 7 profit and that of B at a profit of ₹ 4. Find the production level per day for maximum profit graphically.

23. मान लीजिए कि $f : N \to N$, $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ द्वारा परिभाषित एक फलन है । सिद्ध कीजिए कि $f : N \to S$, जहाँ S, f का परिसर है, व्युत्क्रमणीय है । f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए । अत: $f^{-1}(43)$ तथा $f^{-1}(163)$ ज्ञात कीजिए ।

Let $f : N \to N$ be a function defined as $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$. Show that $f : N \to S$, where S is the range of f, is invertible. Find the inverse of f and hence find $f^{-1}(43)$ and $f^{-1}(163)$.

24. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} yz - x^2 & zx - y^2 & xy - z^2 \\ zx - y^2 & xy - z^2 & yz - x^2 \\ xy - z^2 & yz - x^2 & zx - y^2 \end{vmatrix}$, $(x + y + z)$ से विभाजित है । अत: भागफल ज्ञात कीजिए ।

अथवा

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग से आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए तथा उसका प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$8x + 4y + 3z = 19$$
$$2x + y + z = 5$$
$$x + 2y + 2z = 7$$

Prove that $\begin{vmatrix} yz - x^2 & zx - y^2 & xy - z^2 \\ zx - y^2 & xy - z^2 & yz - x^2 \\ xy - z^2 & yz - x^2 & zx - y^2 \end{vmatrix}$ is divisible by $(x + y + z)$, and hence find the quotient.

OR

Using elementary transformations, find the inverse of the matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ and use it to solve the following system of linear equations :

$$8x + 4y + 3z = 19$$
$$2x + y + z = 5$$
$$x + 2y + 2z = 7$$

25. दर्शाइए कि r त्रिज्या वाले गोले के अंतर्गत उच्चतम आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई $\frac{4r}{3}$ होगी । इसका उच्चतम आयतन गोले के आयतन के पदों में ज्ञात कीजिए ।

अथवा

वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin 3x - \cos 3x, 0 < x < \pi$, निरंतर वर्धमान या निरंतर ह्रासमान है ।

Show that the altitude of the right circular cone of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius r is $\frac{4r}{3}$. Also find maximum volume in terms of volume of the sphere.

OR

Find the intervals in which $f(x) = \sin 3x - \cos 3x, 0 < x < \pi$, is strictly increasing or strictly decreasing.

26. समाकलनों के प्रयोग से क्षेत्र $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2ax, y^2 \geq ax, x, y \geq 0\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using integration find the area of the region $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2ax, y^2 \geq ax, x, y \geq 0\}$.